25X1A [redacted]

U.S. Officials Only

CONFIDENTIAL

SECURITY INFORMATION

CENTRAL INTELLIGENCE AGENCY

INFORMATION REPORT

25X1A

REPORT NO. [redacted]

COUNTRY Germany (Western Zones)/Switzerland/France

SUBJECT 1st Upper Rhine Mathematics Convention

25X1A [redacted]

PLACE ACQUIRED (BY SOURCE) [redacted] 25X1A

DATE ACQUIRED (BY SOURCE) [redacted] 25X1A

DATE (OF INFO.)

DATE DISTR. 7 Nov 52

NO. OF PAGES 2

NO. OF ENCLS. 1

SUPP. TO REPORT NO. 25X1X

THIS IS UNEVALUATED INFORMATION

[redacted]

1. Plans for regular meetings of mathematicians of the Upper Rhenish universities of Basel (Switzerland), Freiburg i.Br. (Germany) and Strasbourg (France) had been under discussion for a considerable time. The first meeting of this kind was held by invitation of Profs. Ostrowski and Speiser, at the Mathematical Institute of the University of Basel, from December 14 to 16, 1951 (Erste Oberrheinische Mathematiker-Zusammenkunft).

2. A comparison of the lines of research at the three universities emerging from the papers reveals very characteristic differences among them. The papers of the Strasbourg mathematicians, in their mathematically elegant, abstract formulation oriented toward basic and general conceptions, clearly emphasize the spirit of the Bourbaki project, where algebra and topology appear as basic pillars of the new order of mathematics. The contributions of the Freiburg mathematicians showed a more marked leaning toward geometric representation, on the one hand, and mathematical applications, on the other. The Basel mathematicians, acting as hosts, were deliberately restrained in their own contributions. Their two papers therefore give no such clear picture of the lines of research pursued in Basel at the present.

3. The papers on geometry of the Freiburg visitors were read by young mathematicians. They are students of Profs. Bol and Suess. Geometry has always had a special home in Freiburg. In addition to this, practical and applied mathematics are being cultivated in Freiburg with a marked intensity unusual for German universities and encountered only exceptionally at German technical colleges. The Mathematical Institute of the University of Freiburg has a separate department for applied mathematics, headed by Prof. Goertler; despite the current financial difficulties in Germany, it is already provided with considerable endowments. Nothing similar exists at the Mathematical Institute in Basel, although applied mathematics (under Prof. Ostrowski) is given considerable attention there too. In Strasbourg, on the other hand, practical and applied mathematics are not especially cultivated.

4. The following were present and gave the papers indicated:

   1. Dr. Barner (Univ. of Freiburg i.Br.) - Complex Planes as Slip Planes with "Projective Movements".

25X1A

U.S. Officials Only

CONFIDENTIAL

SECURITY INFORMATION

[redacted]

2. P. D. Dr. Batschelet (Univ. of Basel)
3. Docent Dr. Bilharz (Univ. of Freiburg i.Br.) - Observations on Mechanical Quadrature
4. Prof. Buchner (Univ. of Basel)
5. Prof. Chabauty (Univ. of Strasbourg) - Generalization of a Demonstration of Tchébatareff in Denumerative Geometry
6. Prof. Deny (Univ. of Strasbourg) - A Remarkable Class of Nuclei
7. Prof. Ehresmann (Univ. of Strasbourg) - The Concept of Infinitesimal Structure
8. P. D. Dr. Fleckenstein (Univ. of Basel)
9. Prof. Goertler (Univ. of Freiburg i.Br.) - Non-linear Partial Differential Equations of the Frictional Surface Type
10. Dr. Leichtweiss (Univ. of Freiburg i.Br.) - The Concept of a Natural Equation for Surfaces and Hypersurfaces
11. Dr. (Miss) Lutz (Univ. of Strasbourg)
12. Prof. Ostrowski (Univ. of Basel) - The Theory of Linear Equations
13. Prof. von der Pahlen (Univ. of Basel)
14. Prof. Richter (Univ. of Freiburg i.Br.)
15. Prof. Speiser (Univ. of Basel)
16. Prof. Spiess (Univ. of Basel) - The Bernoullian Correspondence
17. Prof. Suess (Univ. of Freiburg i.Br.)
18. Prof. Tautz (Univ. of Frieburg i.Br.)
19. Prof. Wachs (Univ. of Strasbourg)

In addition, there were several mathematicians of the Weil a. Rh./St. Louis Research Institute and younger assistants and students from Basel and Freiburg, so that the number of participants was close to forty.

[Available on loan from CIA Library are summaries (in German) of papers presented at the Convention.]

- end -

25X1A

1. Prof. EHRESMANN (Strassburg): 25X1A

Sur la notion de structure infini.

Définition des structures de variétés r fois différentiables, indéfiniment différentiables, analytiques réelles ou complexes, algébriques ou rationelles, à l'aide d'un atlas computable avec un pseudogroupe de transformations.

L'élément fondamental de la théorie des variétés r fois différentiables (ou de la géométrie différentielle) est le jet d'ordre r. (Voir les définitions dans Comptes Rendus Ac.Sc. Paris, 233, 1951, p. 598, 773, 1081.) La composition des jets permet de définir le groupe d'isotropie infinitésimale d'ordre r d'une variété differentiable V_n au point x. Il est isomorphe au groupe L_n^r , groupe d'isotropie infinitésimale de l'espace numérique R^n au point O. La notion de jet conduit à la notion de repère d'ordre r de V_n au point x. L'ensemble $H^r(V_n)$ de ces repères est le prolongement principal d'ordre r de V_n. Il est muni d'une structure d'espace fibré principal de base V_n et de

fibres isomorphes au groupe L_n^r . Par définition un prolongement d'ordre r de V_n est un espace fibré associé à $H^r(V_n)$. Exemples: Espace $T_p^r(V_n)$ ou $T_p^{r*}(V_n)$ des vitesses ou covitesses d'ordre r et de dimension p, espaces d'éléments de contact d'ordre r.

Une structure infinitésimale simple d'ordre r est définie par la donnée d'une section d'un certain prolongement d'ordre r de V_n. L'exemple le plus important est fourni par la structure définie par une structure subordonnée à la structure fibrée de $H^r(V_n)$, obtenue par la restriction du groupe structural L_n^r à un de ses sous-groupes. Par exemple on définit ainsi les structures presque complexes d'ordre r. Pair qu'il existe sur V_n une telle structure, il faut et il suffit qu'il existe une structure presque complexe d'ordre r.

Plus généralement une structure infinitésimale est définie par l'application des opérations suivantes: formation de prolongements d'ordre r, du produit de deux prolongements, d'une extension d'un prolongement et d'un section d'un espace fibré obtenu par les opérations précédentes.

Le pseudogroupe des automorphismes locaux d'une structure infinitésimale est un "groupe fini ou infini de Lie".

2. Prof. GÖRTLER (Freiburg i.Br.):

Nicht-lineare partielle Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus.

Die Theorie der laminaren Reibungsschichten inkompressibler, zäher Flüssigkeiten hat vom Standpunkt des praktischen Interesses einen gewissen Abschluss erreicht. Vom mathematischen Standpunkt gesehen ist dies keineswegs der Fall. Für eine mathematisch strenge Theorie der Grundlagen und Lösungsverfahren liegen erst Anfangserfolge vor. Der Vortragende stellt sich mit dem vorliegenden Vortrag die Aufgabe, die gegenwärtige Situation an einigen Stellen zu beleuchten, deren Auswahl durch seine persönlichen Interessen bestimmt wird. Dass der mathematische Ausbau der Theorie nicht von rein theoretischer Bedeutung sondern praktisch bedeutungsvoll ist, wird dabei deutlich werden.

Bereits die strenge Herleitung der Grundgleichungen der Theorie aus den allgemeinen NAVIER-STOKESschen Bewegungsgleichungen einer zähen Flüssigkeit als asymptotisch gültige Relationen für

unbegrenzt wachsende REYNOLDSsche Zahlen ist ein noch unbefriedigend gelöstes Problem. H. SCHMIDT und K. SCHRÖDER haben das erhebliche Verdienst, erstmals 1942 (Luftfahrtforschung 19, 65-97, 1942) eine den Anforderungen mathematischer Strenge gerecht werdende Herleitung gegeben zu haben. Die dabei benötigten umfangreichen und komplizierten mathematischen Voraussetzungen sind jedoch noch zu sehr auf dem Boden rein-mathematischer Überlegungen erwachsen, als dass sie den für eine hydrodynamische Theorie zu erstrebenden Grad der physikalischen Durchsichtigkeit auch nur annähernd erreicht hätten.

Aber selbst wenn man sich auf die Theorie der Grenzschicht-Gleichungen selbst beschränkt, wenn man also deren Gültigkeit als Ausgangspunkt nimmt, steht es mit der mathematischen Durchdringung trotz der Vielfalt der auf ingenieurwissenschaftlichem Boden entstandenen theoretischen Ergebnisse und Verfahren schlecht. (Man vergleiche hierzu etwa die neuerschienene Monographie von H. SCHLICHTING, "Grenzschicht-Theorie", Verlag G.Braun, Karlsruhe 1951.) Es handelt sich, wenn wir uns hier auf den wichtigsten Fall der ebenen, stationären Grenzschichten beschränken, um das nichtlineare Randwertproblem

$$uu_x + vu_y - \nu u_{yy} = U(x)U'(x),$$
$$u_x + v_y = 0 \;;$$

mit $u = u_0(y)$ für $x = x_0$ und $0 \leqq y \leqq \infty$; $u = v = 0$ für $y = 0$ (feste Wand) und $x_0 \leqq x \leqq x_1$; $\lim u(x,y) = U(x)$ für y gegen ∞ in $x_0 \leqq x \leqq x_1$. Dabei sind u und v die Komponenten der Strömungsgeschwindigkeit in der Grenzschicht in x- bzw. y-Richtung (x die Wandbogenlänge, y der senkrechte Wandabstand). Indizes x und y weisen auf Ableitungen hin. $U(x)$ ist die vorgegebene äussere Geschwindigkeit der Potentialströmung am äusseren Rande der Grenzschicht, ν die konstante kinematische Zähigkeit.

Die in der Praxis bevorzugten approximativen Lösungsverfahren - in erster Linie ein- und zwei-parametrige Verfahren nach dem Muster des POHLHAUSEN-Verfahrens - arbeiten zwar heute sehr rasch (vgl. etwa K.WIEGHARDT, Ing.-Arch. 16, 231-242, 1948), sie können aber schon auf Grund des methodischen Ansatzes nur eine endliche Annäherung an die jeweilige strenge Lösung im allgemeinen liefern. Ausserdem bieten diese Verfahren keinerlei Handhabe zu einer strengen Fehlerabschätzung. Praktisch versagen sie auch gelegentlich gänzlich. Schon aus diesem Grunde ist man auf die mit wesentlich

grösserem Arbeitsaufwand verknüpften strengen Verfahren angewiesen, um wenigstens die Ergebnisse jener nicht-strengen Verfahren immer wieder an typischen und nicht-trivialen Beispielen - nur für solche besitzt man exakte partikuläre Integrale - vergleichend erproben zu können. Unter "streng" ist hier gemeint, dass diese Verfahren grundsätzlich eine beliebig hohe Genauigkeit der Approximation gestatten. Neben den im wesentlichen auf BLASIUS zurückgehenden Reihenentwicklungen, über deren Konvergenz man im allgemeinen Fall wenig oder nichts weiss, sind es in der Hauptsache Differenzen-Verfahren, die den Anspruch auf Strenge im obigen Sinne erheben können, auch wenn die Konvergenzbeweise noch Schwierigkeiten bereiten. Diese Differenzenverfahren sind Fortsetzungsverfahren in dem Sinne, dass die Lösungen von der vorgegebenen Anfangsverteilung in $x = x_0$ aus fortschreitend in x-Richtung (Hauptströmungsrichtung) stromabwärts berechnet werden. Beim heutigen Stand der Entwicklung sind hier die Verfahren von K. SCHRÖDER (Math.Nachr. 4, 439-467, 1951) und von H. GÖRTLER (Ing.-Arch. 16, 173-187, 1948) zu nennen.

Das von K.SCHRÖDER entwickelte Verfahren arbeitet nach Durchführung gewisser Transformationen mit einem Iterationsverfahren in Wandnähe und mit einem bekannten Integralausdruck für u_x in grösserem Wandabstand. Das Verfahren hat den Vorzug, ohne Einschränkung anwendbar zu sein (auch für Probleme des Absaugens und Ausblasens), es erweist sich aber als rechentechnisch relativ kompliziert und erfordert einen etwa viermal so grossen Arbeitsaufwand wie das Verfahren von H.GÖRTLER. Dieses letztere Verfahren hat den Vorzug, ohne Transformationen und Iterationen auszukommen und arbeitet rechentechnisch nach einem einheitlichen und einfachen Schema. Bei Durchschreitung einer Ablösungsstelle jedoch (oder bei Absaugen und Ausblasen) lässt die Rechengenauigkeit in unmittelbarer Wandnähe etwas nach.

Angesichts dieser Situation entwickelt der Vortragende gegenwärtig ein neues Differenzen-Verfahren, das die Nachteile der beiden genannten Verfahren nicht besitzen soll. Ähnlich wie ein älteres Verfahren von VON MISES und LUCKERT (vgl. H.-J. LUCKERT, Schriften des Mathematischen Seminars und des Instituts für angewandte Mathematik der Universität Berlin, 1, 245-274, 1933) operiert es mit der Stromfunktion anstelle des senkrechten Wandabstandes y, jedoch mit einer wesntlichen Modifikation gegenüber jenem älteren Verfahren, wodurch die dort auftretenden Schwierig-

keiten (Nicht-Existenz gewisser Ableitungen an festen Wänden) behoben werden sollen. Es ergibt sich ein einfaches Rechenschema. Das Verfahren wird gegenwärtig an einer Folge typischer Beispiele erprobt. Nach Abschluss der Erprobung soll eine ausführliche Veröffentlichung folgen.

Der Vortragende berichtete dann kurz über eine andere Untersuchung, über die bereits eine vorläufige Mitteilung veröffentlicht worden ist (Zschr.angew.Math.Mech. 30, 265-267, 1950). Hierbei hat er sich zum Ziel gesetzt, für Lösungen und Näherungslösungen allgemeine Vergleichs- und Abschätzungssätze zu gewinnen. Sie dienen etwa dazu, Lösungen bei verschiedenen Randbedingungen oder Stoffwerten zu vergleichen, oder irgendwie gewonnene Näherungslösungen auf ihren Fehler hin abzuschätzen durch Rückschluss aus dem Defizit, das die betreffende Näherungslösung bezüglich der Erfüllung der Grenzschicht-Differentialgleichung liefert. Dabei wird die allgemeinere Klasse der "Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus"

$$uu_x + vu_y = f(x,u,u_y,u_{yy}), \qquad u_x + v_y = 0$$

bei allgemeineren Gebietsformen und Randbedingungen zugrundegelegt. (Gebietsformen und Randbedingungen sind von derselben Allgemeinheit, wie sie im verwandten Problem der linearen Wärmeleitung unter Gewährleistung der Eindeutigkeit der Lösung betrachtet werden können.) Dabei wird von der Funktion f nur Stetigkeit und ferner Monotonie bezüglich der vierten Variablen, gelegentlich auch die Erfüllung einer LIPSCHITZ-Bedingung bezüglich der zweiten Variablen gefordert. Ferner wird positives u im Inneren des Gebiets vorausgesetzt. u und v sollen im Gebiet mit Einschluss des Randes stetig sein und die vorkommenden Ableitungen 1. und 2.Ordnung in jedem inneren Punkte besitzen.

Die Ergebnisse, wie sie bereits 1950 (siehe oben) angedeutet wurden, sind inzwischen in der Beweisführung vereinfacht und durch weitere Ergebnisse erweitert worden. Nunmehr wird eine Veröffentlichung vorbereitet.

Die Verallgemeinerung auf Probleme turbulenter Strömungen (Reibungsschichten, freie Turbulenz) und auf kompressible Strömungen dürfte keine wesentlichen neuen Schwierigkeiten bieten. Der Vortragende glaubt, dass es möglich sein wird, die Theorie der Differentialgleichungen vom Reibungsschicht-Typus so durchsichtig zu gestalten wie jene der linearen Wärmeleitungsgleichung.

3. Dr. LEICHTWEISS (Freiburg i.Br.):

Über den Begriff einer natürlichen Gleichung bei Flächen und Hyperflächen.

Der Vortragende ist ein Schüler von Prof.SÜSS (Freiburg i.Br.). Seine Ausführungen kennzeichnen daher auch die gegenwärtige Arbeitsrichtung seines Lehrers.

Bekanntlich ist eine ebene Kurve durch ihre natürliche Gleichung $\kappa = \kappa(s)$ (κ die Krümmung, s die Bogenlänge) sowie durch das zu s = 0 gehörende Linienelement eindeutig bestimmt. Es stellt sich das Problem, auf eine analoge Weise auch eine Fläche im dreidimensionalen Raum bzw. eine n-dimensionale Hyperfläche im (n+1)-dimensionalen Raum (euklidischen Raum) zu charakterisieren. Versuche in dieser Richtung sind bereits verschiedentlich unternommen worden. Insbesondere bewies RELLICH (Math.Zschr.43), dass zu einer vorgegebenen, hinreichend oft stetig differenzierbaren Funktion f(r,t) und zu einem vorgegebenen, von einem Asymptotenstreifen verschiedenen, hinreichend oft differenzierbaren Streifen Γ in der Umgebung von r = t = 0 stets genau eine Fläche in Asymptotenlinien-Parametern r,t existiert, welche für r = t = Bogenlänge s durch Γ geht und bei welcher die GAUSSsche Krümmung K als Funktion von r und t gleich f(r,t) ist.

Der Vortragende bezeichnet nunmehr ganz allgemein als "natürliche Gleichung" einer Fläche (bzw.Hyperfläche) eine solche Beziehung zwischen einer auf der Fläche (bzw.Hyperfläche) definierten Krümmungsfunktion und speziellen Flächen-Parametern, welche diese Fläche (bzw.Hyperfläche) zusammen mit einem auf ihr liegenden Streifen eindeutig charakterisiert. Er zeigt dann, dass bei einer Fläche die Beziehung zwischen einer linear gebrochenen Funktion ihrer GAUSSschen Krümmung K und ihrer mittleren Krümmung H und den auf die Streifenkurve bezogenen geodätischen Parallelkoordinaten eine solche natürliche Gleichung darstellt. Es gilt nämlich der

<u>Satz</u>: Ist Γ ein durch $\{\mathfrak{X}(s), \mathfrak{n}(s)\}$ gegebener analytischer Streifen und f(p,q) eine analytische Funktion, so gibt es in der Umgebung von p= q = 0 im allgemeinen eine und nur eine Fläche $\mathfrak{X}(p,q)$, die folgenden Bedingungen genügt:

a) $\mathfrak{X}(p,q)$ ist in p = q = 0 analytisch;

b) die Fläche geht für q = 0, p = s durch Γ ;

c) p und q sind auf $\mathfrak{C}(s)$ bezogene geodätische Parallelkoordinaten von $\mathfrak{C}(p,q)$;

d)
$$\frac{2\,l_1\,H(p,q) + l_2\,K(p,q) + l_3}{2\,m_1\,H(p,q) + m_2\,K(p,q) + m_3} \equiv \phi = f(p,q).$$

Der Beweis dieses Satzes lässt sich leicht durch Zurückführung auf den Bonnetschen Satz über die Bestimmung einer Fläche durch ihre erste und zweite Grundform erbringen. Es muss dazu nur die Gleichung $\phi = f$ nach N aufgelöst und dieses N in das sich für die Koeffizienten der ersten und zweitem Grundform von $\mathfrak{C}(p,q)$ ergebende System von Differentialgleichungen eingesetzt werden. Man erhält dann ein normales Differentialgleichungssystem, welches nach dem Satz von S.Kowalewski im allgemeinen eindeutig in analytischer Weise auflösbar ist. Aus diesem Beweis kann man weiter den Schluss ziehen, dass im Falle $\phi \equiv H$ der Zusatz "im allgemeinen" bei dem Satz unnötig ist. Es folgt als Korollar, dass durch einen beliebigen, analytischen Streifen genau eine analytische Fläche konstanter mittlerer Krümmung, also speziell genau eine analytische Minimalfläche geht. Alle diese Tatsachen gelten in entsprechender Weise auch für Hyperflächen; dabei treten an die Stelle von H und K die elementarsymmetrischen Funktionen der Hauptkrümmungen der Hyperfläche.

Nun lässt sich aber auch ein Analogon des Satzes für isotherme, sphärisch-isotherme (d.h. isotherme Parameter des sphärischen Bildes) und affin-isotherme Parameter beweisen (in dem letzten Fall allerdings nur für $\phi \equiv K$). Daraus kann man dann in Verallgemeinerung der Resultate von W.SCHERRER (Comm.Math.Helv.1950, Stützfunktion und Radius II) folgenden Satz gewinnen: "Eine analytische Funktion $\mathfrak{C}(u,v)$ in allgemeinen Parametern u,v ist lokal durch eine linear gebrochene Funktion von H und K, durch den durch v = 0, u = s gegebenen Streifen, sowie durch die (aus der ersten Grundform $E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2$ abgeleitete) relative erste Grundform
$$\frac{1}{+\sqrt{EG - F^2}}\,(E\,du^2 + 2\,F\,du\,dv + G\,dv^2),$$
beziehungsweise durch die (entsprechend definierte) relative dritte Grundform, beziehungsweise im Falle $\phi \equiv K$ durch die relative zweite Grundform im allgemeinen eindeutig charakterisiert".

Endlich werde noch ein Hinweis des Vortragenden verzeichnet,

wonach sich mit der zum Beweis des ersten Satzes angewandten Methode ebenfalls ein einfacher Beweis für den Satz von Darboux über die Realisierung einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit mit analytischer Riemannscher Metrik im dreidimensionalen Raum führen lässt.

Der Vortragende, ein junger Nachwuchs-Mathematiker, der erst kürzlich promovierte, hat mit seinen hier mitgeteilten Ergebnissen zweifellos bemerkenswerte erste Erfolge erzielt.

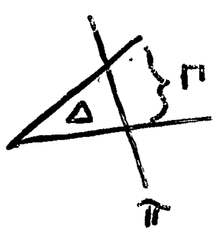
4. Prof. CHABAUTY (Strassburg):

Généralisation d'une démonstration de Tchébotareff en géométrie des nombres.

Von diesem Vortrag, der von den Teilnehmern als schwer verständlich empfunden wurde, und an den sich keine Diskussion anschloss, bringe ich nur die wesentlichen Sätze aus dem schriftlichen Auszug des Vortragenden:

Soit G un réseau ("gitter") dans R^n, $m(G)$ son déterminant. Pour un $A \subset R^n$ définissons $d(A) = \operatorname{Inf}_{G+A \neq R^n} m(G)$, c'est un invariant pour les transformations affine unimodulaires. Pour A borné trivialement $d(A) = 0$. Pour $A = P_n = \{|\prod x_i| \leq 1\}$ la relation $d(P_n) \geq 2^n$ est equivalente à la conjecture bien connue de MINKOWSKI sur le probl`eme non homogène sur le produit de n formes linéaires indépendantes à n variables. Cette conjecture n'a été jusqu'à démontrée que pour $n \leq 4$. Pour un n général on a seulement le résultat de TCHEBOTAREFF $d(P_n) \geq (\sqrt{2})^n$. Sa demonstration a suggéré d'étudier d(A) pour des domaines assez généraux.

Soit Γ un cône convexe de R^n. Soit π un hyperplan séparant dans Γ un domaine borné Δ. Soit $E_{r,c} = \overline{\bigcup_{m(\Delta) \leq c} \mathring{\Delta}}$ ($\mathring{A}$ = interieur de A.) E sera dit un domaine equicarène, la constante c sa carène. Pour un domain equicarène général de R^n l'auteur a demontré



$$(1) \qquad d(E) \geq \frac{4n}{2^n\, n^n + 1} \text{ carène}(E).$$

Pour des domaines particuliers études par la même methode on peut améliorer (1).

5. Prof. WHITNEY (Harvard Univ., z.Zt. Strassburg):

Sur la théorie de l'intégration. L'intégration r-dimensionelle dans l'espace n-dimensionelle.

Anstelle eines ursprünglich vorgesehenen Vortrags von Dozent Dr. RUND (Capetown Univ., z.Zt.Freiburg i.Br.), der ausfiel, trug Prof.WHITNEY aus USA über Integrationstheorie vor. Es kam ihm dabei darauf an, die Hörer mit einigen Begriffsbildungen vertraut zu machen, und sein Vortrag gipfelte in dem Theorem von J.H.WOLFE und Folgerungen daraus. Aus dem in französischer Sprache gehaltenen Vortrag sei zitiert:

Il semble important d'étudier l'intégration comme fonction du domaine, ce qui n'a pas été fait d'une manière générale. Parmi les "champs d'intégration" on doit surement avoir des chaînes polyédrales, qui forment un espace linéaire. On défini des normes dans cette espace; alors un "intégral" sera une fonction de chaînes, bornée dans cette norme. Le masse $|A|$ de $A = \sum a_i \sigma_i$ est $\sum |a_i| |\sigma_i|$, ou $|\sigma|$ est le volume ordinaire de σ . La norme lâche $|A|^*$ est la plus grande norme telle que $|\sigma|^* \leqq |\sigma|$, $|\partial\sigma| \leqq |\sigma|$. Alors une cochaîne lâche X est une fonction $X \cdot A$, qui satisfait $|X \cdot A| \leqq N|A|^*$ pour chaque A; le plus petit N est $|X|^*$. On définit $\delta X \cdot A = X \cdot \partial A$.

Le théorème de J.H.WOLFE (thése, Harvard, 1940) est que les X correspondent exactement aux formes différentielles ω : $X \cdot \sigma = \int_\sigma \omega$; ω est mesurable,avec certaines conditions sur des bornes. Avec la théorie générale on trouve des théorèmes de nature analytique très générale. Par exemple: ω donne X donne δX donne $\delta\omega$, même avec ω pas continue. Pour les applications f qui satisfaisent à une condition de Lipschitz, on a $f^* \delta X = \delta f^* X$; donc on trouve $f^* \delta\omega = \delta f^* \omega$.

6. Prof. OSTROWSKI (Basel):

Zur Theorie der linearen Gleichungen.

Dieser Vortrag bestand lediglich in einigen wenigen und kurzen Bemerkungen über die Auflösung von Systemen linearer Gleichungen. Der Vortragende führte aus, dass die Fortschritte in der Theorie der linearen Gleichungen durch den Entwicklungs-

stand der Rechentechnik bedingt sind. Die elementare Methode der sukzessiven Elimination war bis vor kurzem die Beste. Die moderne Vervollkommnung dieser Methode läuft auf die Zerlegung der Gleichungsmatrix in ein Produkt aus zwei Dreiecksmatrizen hinaus, welche die Reduktion auf ein Dreieckssystem

$$x_k + a_{k,k+1}x_{k+1} + \dots\dots\dots + a_{k,n}x_n = a_k$$

zum Ziele hat. Bereits auf dieser Stufe ist die Beurteilung der Akkumulation der Abrundungsfehler möglich. Es zeigt sich, wie der Vortragende im einzelnen näher ausführte, dass im allgemeinen die sorgfältige Auswahl der sukzessive zu eliminierenden Variablen nicht zu umgehen ist, wenn auch die damit verbundene Notwendigkeit der wiederholten Umnumerierungen der Variablen bei den praktischen Rechnern aus guten Gründen sehr wenig beliebt ist.

7. Dozent Dr. BILHARZ (Freiburg i.Br.):

Bemerkung zur mechanischen Quadratur.

Die Ausführungen des Vortragenden bildeten einen Ausschnitt aus einer Arbeit, die er im nächsten Heft der "Mathematischen Nachrichten" (Math.Nachr. 6, 171-192, 1951) veröffentlichen wird. Der Vortragende zeigte, dass sich für das Restglied jeder Quadraturformel, die nur symmetrisch zur Mitte des Integrationsintervalls gelegene Argumente verwendet, zwei Reihenentwicklungen aufstellen lassen, die als Verallgemeinerung der BOOLEschen und der EULER-MACLAURINschen Summenformel angesehen werden können. Er wies nach, dass die hierbei auftretenden Koeffizienten rational sind und mit den BERNOULLIschen Zahlen zahlreiche weitere Eigenschaften gemein haben. Ihre numerischen Werte und ihre erzeugenden Funktionen lassen sich explizite angeben. Der Vortragende legte als Beispiel die GAUSS'sche Quadraturformel zugrunde. So ist auch der Titel seiner oben angekündigten Arbeit "Über die GAUSS'sche Methode zur angenäherten Berechnung bestimmter Integrale" zu verstehen.

Die Ausführungen zeigten eine Reihe bemerkenswerter Eigenschaften der auftretenden Zahlen-Koeffizienten, die zu einem

weiteren Studium führen sollen, von dem auch manche wertvolle praktische Nutzanwendung zu erwarten ist.

8. Prof. DENY (Strassburg):

Sur une classe remarquable de noyaux.

Der Vortrag brachte eine bemerkenswerte Modifikation des Begriffs "Balayage" (hierfür gibt es keine geläufige Übersetzung oder eigene Wortprägung in der deutschen Sprache). Die Ausführungen des Vortragenden seien in seiner eigenen Formulierung ausführlicher wiedergegeben:

Pour déterminer les noyaux satisfaisant à un théorème du "balayage", il est utile de modifier quelque peu les définitions classiques.

Soit K une mesure (de RADON) définie dans R^m, positive. Le potentiel engendré par la mesure $\mu \geqq 0$ est le "produit de composition" $K * \mu$ (pourvu qu'il ait un sens, ce qui a lieu si μ est à support compact). On dira que "le balayage est possible pour le noyau K " si, à toute $\mu \geqq 0$ à support compact et à tout compact C on peut associer au moins une $\mu' \geqq 0$ portée par C et telle que

(B_1) $\int d\mu' \leqq \int d\mu$

(B_2) $K * \mu' \leqq K * \mu$

(B_3) $K * \mu' = K * \mu$ sur C.

On voit facilement qu'avec ces définitions l'ensemble des noyaux pour lesquels le balayage est possible est fermé pour la topologie vague.

Le résultat essentiel est le suivant: Le balayage est possible pour tout noyau de la forme:

(1) $$K = \frac{1}{a} (\delta + \sigma + \sigma^2 + \ldots\ldots)$$

où: a est une constante > 0,
δ la mesure de DIRAC
σ une mesure 0 quelconque, symétrique, avec $\int d\sigma < 1$,
$\sigma^p = \sigma * \sigma * \ldots\ldots * \sigma$ (p fois).

Le balayage est donc possible pour toute limite vague de telles mesures.

En particularisant σ , on voit que le balayage est possible pour le transformé de FOURIER de $(A + B|x|^{\alpha})^{-1}$ $(0 \leqq \alpha \leqq 2)$, qui contient comme cas particulier les cas classiques du noyau d'ordre α de M.RIESZ et de la solution élémentaire de $c^2u - \Delta u = 0$; plus généralement le balayage est possible pour le transformé de $1/\int_0^2 |x|^{\alpha} d\lambda(\alpha)$, où λ est une mesure $\geqq 0$ arbitraire.

On peut montrer que, réciproquement, tout noyau $K \geqq 0$, du type positif, pour lequel le balayage est possible, est limite vague de noyaux de la forme (1) (du moins moyennant quelques hypothèses de régularité simple).

9. Dr. BARNER (Freiburg i.Br.):

Komplexflächen als Schiebflächen bei projektiven Bewegungen.

Der Vortragende ist ein Schüler des Freiburger Geometers Prof. BOL, durch dessen umfassende Arbeiten zur projektiven Differentialgeometrie auch die vorliegende Untersuchung angeregt wurde,

Wenn die Tangenten an die Asymptotenlinien einer Schar einer Fläche des dreidimensionalen projektiven Raumes jeweils einem linearen Komplex angehören, spricht man von einer Komplexfläche. Solche Flächen lassen sich erzeugen mittels speziellen "projektiven Bewegungen" und bilden somit ein geeignetes Beispiel der kinematischen Betrachtungsweise in der projektiven Differentialgeometrie.

Als "projektive Kinematik" bezeichnet man das Studium der einparametrigen "Bewegung" eines projektiven Koordinatensystems und aller mit diesem fest verbundener Punkte. Das einfachste Beispiel, eine Kinematik in binären Gebieten, wird beispielsweise realisiert von zwei Doppelverhältnis-Scharen auf einer Regelfläche.

Zur Behandlung der Komplexflächen betrachtet der Vortragende nun solche projektiven Bewegungen des dreidimensionalen Raumes, bei denen im bewegten System ein Nullsystem ausgezeichnet ist, das jeden Punkt auf die Schmiegebene der von diesem Punkt erzeugten Bahnkurve abbildet. Gibt man im bewegten System eine Kurve vor, die von diesem Nullsystem in ihre Schmiegebene-Mannigfaltigkeit

übergeführt wird - die Tangenten gehören dann dem zugehörigen linearen Komplex an -, so entsteht eine Komplexfläche, deren zweite Schar von Asymptotenlinien die Bahnkurven sind. Jede Komplexfläche lässt sich so erzeugen.

Von den vielen geometrischen Fragen, die mit diesen Flächen verbunden sind, griff der Vortragende die Frage nach singulären Kurven solcher Art heraus, dass die Komplexkurven sich ein-, zwei- oder mehrpunktig berühren. Er zeigte, dass man vier singuläre Kurven vorschreiben kann.

Für die Kurventheorie besonders interessant sind die Flächen mit einer vierfachen singulären Kurve. Der Vortragende konnte zeigen, dass die zugehörige projektive Bewegung eine "Projektiv-Abwicklung" einer beliebigen Raumkurve auf eine Komplexkurve vermittelt. Bei der Abwicklung bleiben die Kurveninvarianten erhalten bis auf diejenige, deren Verschwinden die Komplexkurven kennzeichnet.

Der Vortrag bot ein recht schönes Beispiel für die deutsche geometrische Schule und zeigte, um ein Wort von Prof.OSTROWSKI aus der Diskussion zu zitieren, in erfreulicher Weise, dass Geometrie nicht erst südlich der Alpen in Europa betrieben wird.

10. Prof. SPIESS (Basel):

Die Bernoulli-Korrespondenz.

Der Vortragende, der bereits am Tage zuvor, die Teilnehmer der Tagung an die historischen Gedenkstätten der BERNOULLIs geführt hatte, berichtete in diesem Vortrag über seine erfolgreiche Nachforschung nach dem umfangreichen Briefwechsel der BERNOULLIs und über die Sicherstellung des wesentlichen Bestandes dieser Korrespondenz. (Wäre diese Sicherstellung vor Jahren nicht erfolgt, so läge diese Korrespondenz heute in der Sowjetzone Deutschlands oder wäre längst nach Russland verbracht worden.)

Prof.SPIESS ist mit der Bearbeitung und Herausgabe der Werke der BERNOULLIs beauftragt. Es war erfreulich zu hören, dass diese Arbeit nun so weit gediehen ist, das in Kürze der erste Band erscheinen kann. Das gesamte Unternehmen wird sehr viele Bände umfassen, deren Anzahl heute noch nicht angegeben werde kann aber grössenordnungsmässig bei 20 liegen dürfte.